Cursul 3. Mecanica punctului material
Mişcarea curbilinie

2.1 Viteza în mişcarea curbilinie

Viteza medie

Să considerăm o mişcare curbilinie plană. În acest caz nu se poate renunţa la caracterul vectorial al mărimilor care apar. Fiecare din aceste mărimi va avea componente pe cele două direcţii:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_x + \Delta\vec{r}_y = \Delta r_x \vec{i} + \Delta r_y \vec{j}, \tag{2.1}$$

de unde viteza medie:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}_x + \Delta\vec{r}_y}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}_x}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{r}_y}{\Delta t} = \frac{\Delta r_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta r_y}{\Delta t}\vec{j} = v_{mx}\vec{i} + v_{my}\vec{j}\,. \tag{2.2}$$

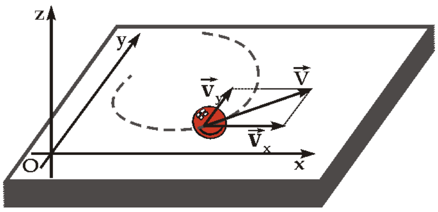

Fig. 2.1 Mişcarea curbilinie planră.

- Orientarea vitezei medii coincide cu orientarea deplasării.
- Modulul vitezei medii se obţine pe baza relaţiei:

$$v_m = |\vec{v}_m| = \sqrt{v_{mx}^2 + v_{my}^2}\,. \tag{2.3}$$

Viteza instantanee

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\vec{r}_x + \Delta\vec{r}_y)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}_x}{dt} + \frac{d\vec{r}_y}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\vec{i} + \frac{dr_y}{dt}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}\,. \tag{2.4}$$

Orientarea vitezei instantanee coincide cu orientarea deplasării indiferent cât de scurt este intervalul de timp. Viteza instantanee este orientată tangent la traiectorie în orice punct al acesteia.

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,. \qquad (2.5)$$

2.2 Acceleraţia în mişcarea curbilinie

Considerăm mişcarea unui punct material astfel încât la momentul de timp t_1 are viteza $\vec{v}_1$ iar la momentul de timp t_2 are viteza $\vec{v}_2$.

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1\,. \qquad (2.6)$$

În mişcarea curbilinie viteza variază atât în modul cât şi în direcţie.

- Variaţia liniară (sau tangenţială) a vitezei $\Delta\vec{v}_t$ reprezintă vectorul care exprimă creşterea modulului vitezei în intervalul de timp Δt.
- Variaţia normală a vitezei $\Delta\vec{v}_n$ reprezintă vectorul care exprimă variaţia orientării vitezei în intervalul de timp Δt.

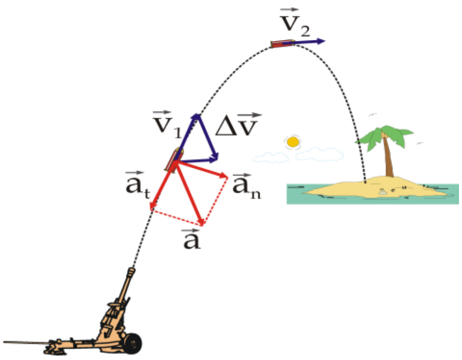

Fig. 2.2 Acceleraţia normală şi acceleraţia tangenţială în mişcarea curbilinie.

Variaţia totală a vitezei punctului material este:

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_t + \Delta\vec{v}_n\,. \qquad (2.7)$$

Din ultima relaţie rezultă acceleraţia medie ca fiind:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{v}_t + \vec{v}_n)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}_t}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} = \vec{a}_{m,t} + \vec{a}_{m,n}\,. \qquad (2.8)$$

De unde **acceleraţia instantanee** este:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_n\,. \qquad (2.9)$$

În mişcarea curbilinie variată punctul material suferă două acceleraţii: 1) acceleraţia liniară $\vec{a}_t$ care este o măsură a variaţiei în modul a vitezei punctului material şi 2) acceleraţia normală $\vec{a}_n$ care este o măsură a variaţiei orientării punctului material.

2.3 Mişcarea circulară. Legea de mişcare

Mişcarea circulară este o mişcare plană. Mişcarea circulară este foarte importantă în tehnică (piesa cea mai des întâlnită în construcţia maşinilor şi mecanismelor este roata – sub diferite aspecte). În mişcarea circulară modulul vectorului de poziţie al punctului material este constant. Mişcarea circulară poate fi descrisă de o singură variabilă care precizează doar orientarea vectorului de poziţie.

Legea de mişcare

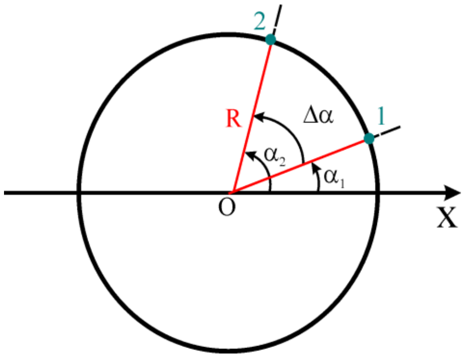

Fig. 2.3 Coordonatele mişcării circulare.

Să considerăm un punct material care la timpul t_1 are poziţia precizată de unghiul α_1 iar care la timpul t_2 are poziţia precizată de unghiul α_2. Se poate defini o deplasare unghiulară $\Delta\alpha$:

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 . \qquad \text{(C2.10)}$$

*Definiţie: Dependenţa de timp a unghiului α, sau a deplasării unghiulare, reprezintă **legea de mişcare** în mişcarea circulară, şi se scrie:*

$$\alpha = \alpha(t). \qquad (2.11)$$

Dacă Δs reprezintă spaţiul parcurs de punctul material iar R este raza cercului pe care acesta se mişcă atunci se poate scrie relaţia:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta s}{R}. \qquad (2.12)$$

Pentru un unghi oarecare α relaţia anterioară are forma:

$$\alpha = \frac{s}{R}. \qquad (2.13)$$

Dimensiunea unghiului α este:

$$[\alpha] = \frac{[s]}{[R]} = \frac{L}{L} = 1. \qquad (2.14)$$

Unitatea de măsură este **radianul**. Un radian este unghiul la centru subîntins de un arc egal cu raza.

2.4 Viteza unghiulară

*Definiţie: Se numeşte viteza unghiulară raportul dintre deplasarea unghiulară infinitezimală **dα**, efectuată de către punctul material în intervalul de timp infinitezimal **dt** şi acest interval de timp.*

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}. \qquad (2.15)$$

Unitatea de măsură a vitezei unghiulare este:

$$[\omega]=\frac{[d\alpha]}{[dt]}=\frac{[\alpha]}{[t]}=\frac{rad}{s}=T^{-1}. \qquad (2.16)$$

2.5 Mişcarea circulară uniformă

Definiţie: Se numeşte uniformă acea mişcare circulară în care raza vectoare mătură unghiuri la centru egale, în intervale de timp egale sau punctul material parcurge pe cerc arce în intervale de timp egale.

$$\omega=\frac{\Delta\alpha_1}{\Delta t}=\frac{\Delta\alpha_2}{\Delta t}=\ldots=\frac{\Delta\alpha_n}{\Delta t}=const. \qquad (2.17)$$

În acest caz ecuaţia deplasării unghiulare se poate obţine prin integrare din ecuaţia (2.15):

$$\omega=\frac{d\alpha}{dt} \quad\Rightarrow\quad d\alpha=\omega\cdot dt \quad\Rightarrow\quad \int_{\alpha_0}^{\alpha(t)} d\alpha=\int_0^t \omega\cdot dt'$$
$$\alpha(t)-\alpha_0=\omega\int_0^t dt'=\omega\cdot t \qquad . \qquad (2.18)$$
$$\alpha(t)=\alpha_0+\omega\cdot t$$

Dacă la t = 0 putem considera că $\alpha_0 = 0$ atunci:

$$\alpha(t)=\omega\cdot t. \qquad (2.19)$$

2.6 Legătura între mărimile unghiulare şi mărimile liniare în mişcarea circular uniformă.

Viteza tangenţială este:

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{d(\alpha\cdot R)}{dt}=R\frac{d(\alpha)}{dt}=R\cdot\omega\cdot \qquad (2.20)$$

Deci relaţia dintre viteza liniară **v** şi viteza unghiulară ω:

$$v=R\cdot\omega. \qquad (2.21)$$

În mişcarea circulară uniformă viteza unghiulară ω este constantă astfel rezultă că şi viteza liniară este constantă în modul. În acelaşi timp orientarea vectorului viteză variază continuu. În mişcarea curbilinie uniformă acceleraţia liniară $\vec{a}_l=\vec{a}_t$ este egală cu zero. Acceleraţia normală, $\vec{a}_n$ în schimb este diferită de zero.

*Definiţie: Timpul necesar punctului material pentru a efectua o rotaţie completă se numeşte perioadă şi se notează cu **T**.*

Definiţie: Mărimea fizică care arată cate rotaţii execută punctul material în timp de o secundă se numeşte frecvenţă.

Astfel:

$$\nu = \frac{1}{T}\,. \tag{2.22}$$

Unitatea de măsură este:

$$[\nu] = \frac{1}{[T]} = \frac{1}{s} = Hz\,. \tag{2.23}$$

În intervalul de timp egal cu o perioadă spaţiul parcurs de către un punct material în mişcarea circulară este $2\pi R$; atunci:

$$v = \frac{s}{T} = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi\cdot\nu\cdot R = \omega\cdot R\,. \tag{2.24}$$

unde în ultima egalitate s-a folosit ecuaţia (2.21). De aici rezultă:

$$\omega = 2\pi\cdot\nu = \frac{2\pi}{T}. \tag{2.25}$$

Acceleraţia normală în mişcarea uniformă este:

$$\frac{dv_n}{dR} = \frac{v}{R} \quad \Rightarrow dv_n = \frac{v}{R}dR\,, \tag{2.26}$$

$$a = a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{v}{R}\frac{dR}{dt} = \frac{v}{R}v\,, \tag{2.27}$$

de unde:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R\,. \tag{2.28}$$

În mişcarea circulară uniformă acceleraţia instantanee este orientată normal la viteza liniară instantanee, după raza cercului de rotaţie, înspre centrul său.

2.7 Acceleraţia unghiulară

Definiţie: Mişcarea circulară în care viteza unghiulară a punctului material variază în timp se numeşte mişcare circulară variată sau neuniformă.

Definiţie: Acceleraţia unghiulară este variaţia vitezei unghiulare într-un interval de timp infinitezimal.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{2.29}$$

2.8 Mişcarea circulară uniform variată

Definiţie: Mişcarea circulară în care acceleraţia unghiulară este constantă se numeşte mişcare circulară uniform variată.

$$
\begin{aligned}
&d\omega = \varepsilon \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\omega 0}^{\omega(t)} d\omega = \int_0^t \varepsilon \cdot dt' \quad \Rightarrow \\
&\omega(t) - \omega 0 = \varepsilon \cdot \int_0^t dt' = \varepsilon \cdot t \quad \Rightarrow \qquad , \\
&\omega(t) = \omega 0 + \varepsilon \cdot t
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

care reprezintă ecuaţia vitezei unghiulare în mişcarea circulară uniform variată, cu viteză iniţială. Dacă aceasta este egală cu zero atunci:

$$\omega(t) = \varepsilon \cdot t\,. \tag{2.31}$$

Din ecuaţia (2.18) avem:

$$
\begin{aligned}
&\omega(t) = \frac{d\alpha}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\alpha = \omega(t) \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \int_{\alpha 0}^{\alpha(t)} d\alpha = \int_0^t \omega(t') \cdot dt' \quad \Rightarrow \\
&\alpha(t) - \alpha_0 = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon \cdot t')dt' = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}
\end{aligned}
\quad , \tag{2.32}
$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}\,. \tag{2.33}$$

2.9 Caracterul vectorial al mărimilor unghiulare

Vectorul $\vec{\omega}$ este orientat perpendicular pe planul format de vectorii $\vec{R}$ şi $\vec{v}$ iar sensul îi este dat de sensul de orientare a unui burghiu drept care este rotit în sensul în care se roteşte pe cerc punctul material studiat.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}\,, \tag{2.34}$$

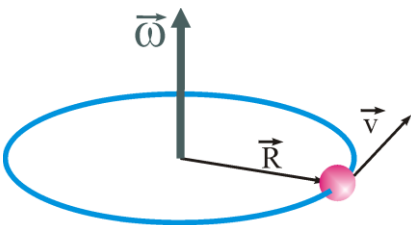

Fig. 2.4 Orientarea relativă a vectorilor în mişcarea circulară.

iar:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}\,, \tag{2.35}$$

şi acceleraţia unghiulară:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\,. \tag{2.36}$$